Fachhochschule Kiel
Hochschule für Angewandte Wissenschaften

Mathematik Brückenkurs

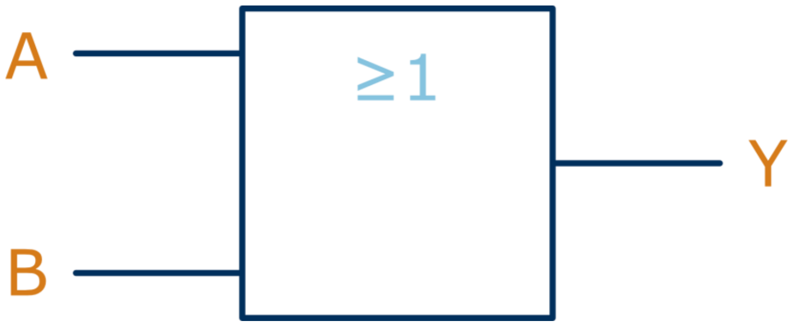
Fachbereich Informatik und Elektrotechnik

Inhaltsverzeichnis

1 Elementare Logik – Motivation

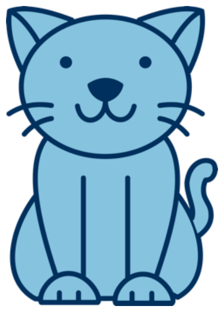
- Fundament unserer Digitalen Welt – An oder Aus, 0 oder 1, Spannung oder keine Spannung.

- Die Grundbausteine eines Computers sind Logikgatter, die nicht viel mehr darstellen können als 0 oder 1.



1 Elementare Logik – Definition und Beispiele

- Logik ist deterministisch; Sie weißt jeder Aussage entweder die Eigenschaft **wahr** oder **falsch** zu.
- Beispiel 1: Die Aussage $0 = 1$ ist entweder falsch oder wahr. In diesem Fall ist die Aussage falsch.
- Beispiel 2: Die Katze ist blau; wahr oder falsch?



→ Problematik der Mehrdeutigkeit der Sprache!

1.1 Aussagenlogik - Junktoren

- Aussagen können miteinander verknüpft werden.
- Diese Verknüpfungen nennt man Junktoren:

Junktor	Bedeutung	Junktorenzeichen	
Negation	„nicht“	$\neg$	$\overline{}$
Konjunktion	„und“	$\wedge$	$\cdot$
Disjunktion	„oder“	$\vee$	$+$
Ausschließende Disjunktion	„exklusiv oder“ „xor“	$\oplus$	$\not\leftrightarrow$
Implikation	„wenn … dann“	$\rightarrow$	$\Rightarrow$
Äquivalenz	„genau dann … wenn“	$\leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$

1.1.1 Aussagenlogik - Wahrheitstabellen

- Verknüpfte Aussagen lassen sich gut durch ihre Wahrheitstabellen beschreiben:

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \oplus B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
W	W	F	F	W	W	F	W	W
W	F	F	W	F	W	W	F	F
F	W	W	F	F	W	W	W	F
F	F	W	W	F	F	F	W	W

1.1.2 Aussagenlogik - Beispiele

Wir betrachten die folgenden Aussagen:

A: Es ist kalt. B: Es schneit.

$\bar{A}$	Es ist nicht kalt.
$A \wedge B$	Es ist kalt und es schneit.
$A \vee B$	Es ist kalt oder es schneit oder beides gleichzeitig.
$A \oplus B$	Es ist kalt und es schneit nicht oder es ist nicht kalt und es schneit.
$B \rightarrow A$	Wenn es schneit ist es kalt. → nicht: Wenn es kalt ist schneit es.
$A \leftrightarrow B$	Es schneit genau dann wenn es kalt ist. → Nicht haltbare Aussage!

1.2 Prädikatenlogik - Definition

- Einige Aussagen haben keinen definitiven Wahrheitswert wie z. B. $x > 0$ wenn x noch unbekannt ist, dafür werden Quantoren eingeführt.

Quantor	**Bedeutung**	**Zeichen**
Existenzquantor	„Es existiert mindestens ein …“	$\exists$
Allquantor	„Für alle …“	$\forall$
Eindeutigkeitsquantor	„Es existiert genau ein …“	$\exists!$
Anzahlquantor	„Es existieren genau x …“	$\exists^{=x}$

1.2.1 Prädikatenlogik - Beispiele

- Alle Katzen sind Säugetiere: $\forall x(\mathrm{Katze}(x) \Rightarrow \mathrm{Säugetier}(x))$
- Es gibt mindestens eine Stadt nördlich von München: $\exists x(\mathrm{Stadt}(x) \wedge \mathrm{nördlich}(x, \mathrm{München}))$
- Nicht alle Autos sind grün: $\neg\forall x\colon \mathrm{Autos}(\mathrm{grün}(x))$

  $\exists x\colon \mathrm{Auto}(\mathrm{nicht\ grün}(x))$

1.3 Logik - Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Wahrheitswerte der folgenden Aussagen (W = Wahr, F = Falsch)
   a) $\mathrm{W} \wedge \overline{\mathrm{F}}$ b) $\mathrm{W} \vee (\mathrm{W} \longrightarrow \mathrm{F})$ c) $(W \leftrightarrow W) \wedge F$ d) $\left(\overline{W} \oplus (F \rightarrow W)\right) \wedge (W \rightarrow F) \wedge (W \wedge F)$

Lösung

a) W b) W c) F d) F

2 Mengen - Motivation

- Die Mengenlehre dient der Gliederung und dem Vergleich von Mengen.

- Die Konzepte der Mengenlehre finden Anwendung in der Datenverwaltung, zum Beispiel bei SQL.

```sql
SELECT *
FROM M_1
WHERE id NOT IN (
    SELECT id FROM (
        SELECT id FROM M_1
        INTERSECT
        SELECT id FROM M_2
        UNION
        SELECT id FROM M_3
    ) AS Subquery
);
```

2 Mengen - Definition

- Eine Menge ist ein abstraktes Objekt, bestehend aus wohl unterschiedenen Elementen.
- Im Allgemeinen kann alles ein Element einer Menge sein, so auch andere Mengen.
- Häufig ist es hilfreich Zahlen in Mengen zusammenzufassen:

$$M = \{2, 3, 5, 7\}$$

- Kennzeichnung der Elemente: $2 \in M$, 2 ist Element von M

  $4 \notin M$, 4 ist nicht Element von M

2.1 Mengen - Darstellungsformen

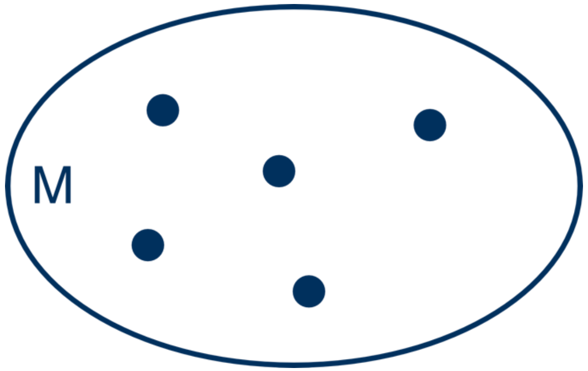
- Aufzählend: $M = \{2, 3, 5, 7\}$

- Beschreibend: $M = \{x \mid \text{Eigenschaften der Elemente } x\}$,

  Beispiel: $M = \{x \mid x \in \mathbb{N} \land x < 6\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

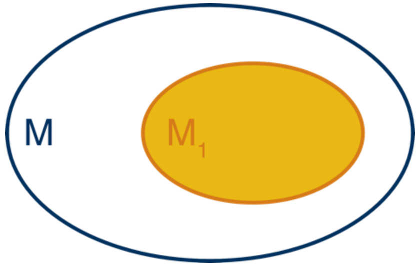
- Leere Menge: $M = \{\,\} = \emptyset$

- Graphische Darstellung:

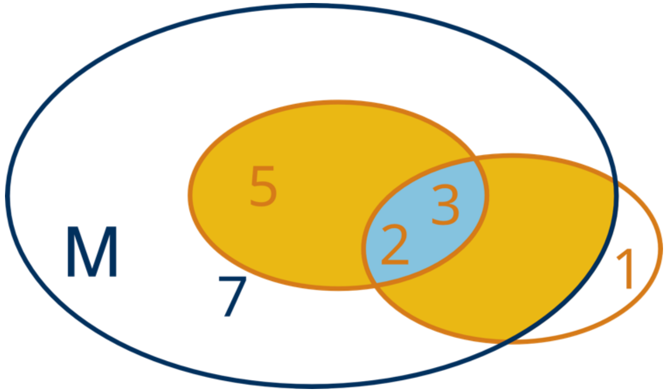


2.2.1 Mengenrelationen - Teilmenge

- Definition: M_1 ist Teilmenge von M, wenn jedes Element von M_1 auch Element von M ist.
- Schreibweise: $M_1 \subset M$, bzw. $M_2 \not\subset M$
- Venn-Diagramm:



- Beispiele: $M = \{2, 3, 5, 7\}$, $M_1 = \{2, 3, 5\}$, $M_2 = \{1, 2, 3\}$

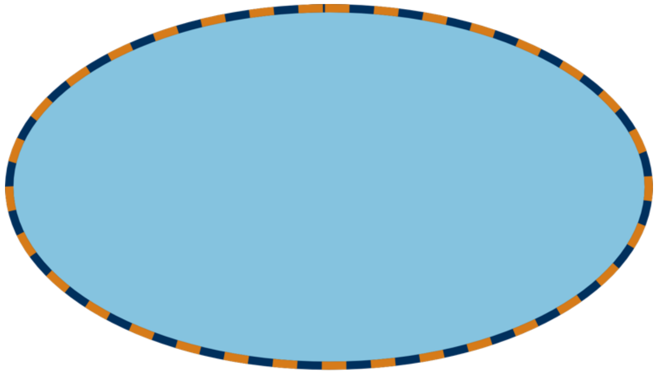


2.2.2 Mengenrelationen - Gleichheit

- Definition: Zwei Mengen heißen genau gleich, wenn beide Mengen die gleichen Elemente enthalten.

- Schreibweise: $M_1 = M$, bzw. $M_2 = M$

- Venn-Diagramm:



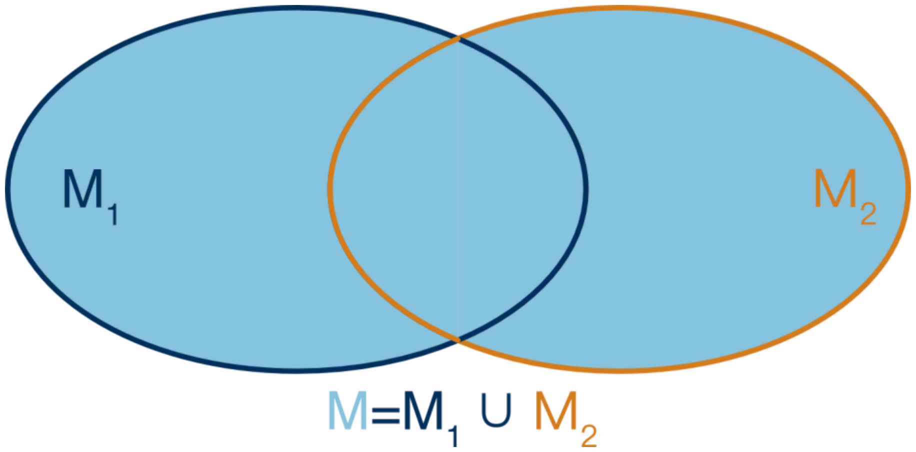
- Beispiele: $M_1 = \{2, 3, 5, 7\}$, $M_2 = \{2, 3, 5, 7\}$

2.2.3 Mengenoperationen - Vereinigung

- Definition: Die Vereinigung zweier Mengen M enthält diejenigen Elemente, die in mindestens einer der beiden vereinigten Mengen M_1 und M_2 enthalten ist.

- Schreibweise: $\mathrm{M} = M_1 \cup M_2$, bzw. $M = \{x \mid x \in M_1 \vee x \in M_2\}$

- Venn-Diagramm:



- Beispiele: $M_1 = \{2, 3, 5, 7\}$, $M_2 = \{4, 9, 1\} = \{1, 4, 9\}$

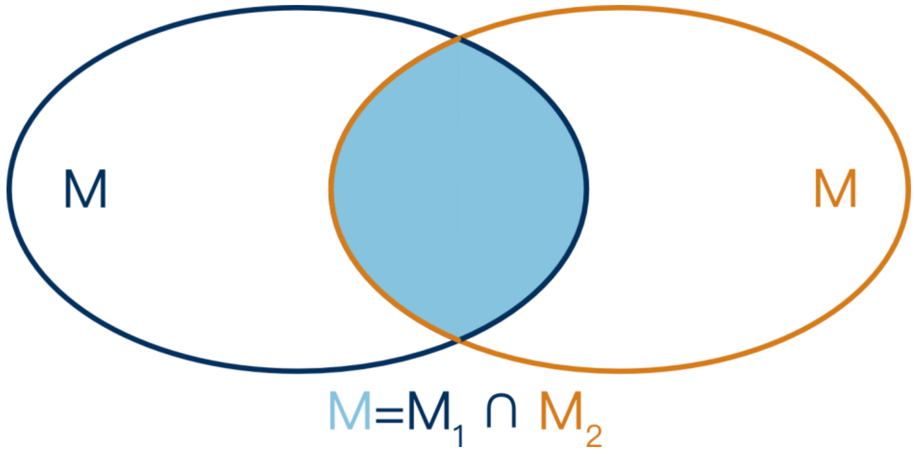
  $M = M_1 \cup M_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$

2.2.4 Mengenoperationen – Durchschnitt (Schnitt)

- Definition: Der Durchschnitt zweier Mengen M enthält diejenigen Elemente, die in beiden Mengen M_1 und M_2 enthalten sind.

- Schreibweise: $\mathrm{M} = M_1 \cap M_2$, bzw. $M = \{x \mid x \in M_1 \wedge x \in M_2\}$

- Venn-Diagramm:



- Beispiele: $M_1 = \{1, 3, 6, 8\}$, $M_2 = \{4, 6, 8\}$

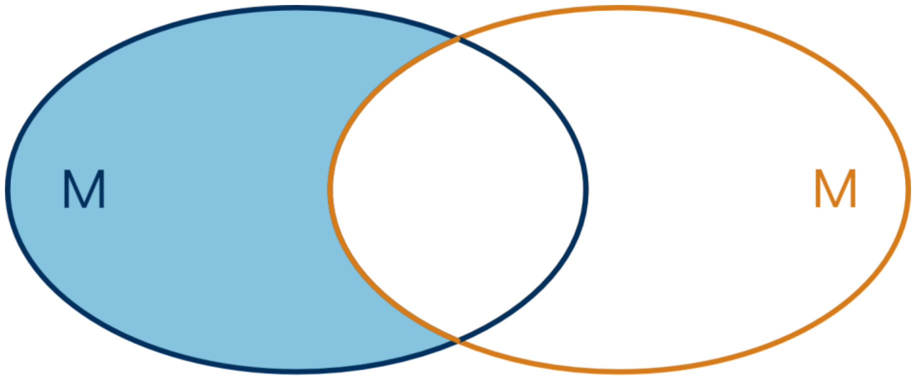
  $M = M_1 \cap M_2 = \{6, 8\}$

2.2.5 Mengenoperationen – Differenz

- Definition: Die Differenz zweier Mengen M_1 und M_2 enthält diejenigen Elemente, die in M_1, aber nicht in M_2 enthalten sind.

- Schreibweise: $\mathrm{M} = M_1 \setminus M_2$, bzw. $M = \{x \mid x \in M_1 \wedge x \notin M_2\}$

- Venn-Diagramm:



$M = M_1 \setminus M_2$

- Beispiele: $M_1 = \{2, 3, 5, 7\}$, $M_2 = \{2, 3, 4\}$

  $M = M_1 \setminus \mathrm{M}_2 = \{5, 7\}$

2.2.7 Mengenoperationen – Kardinalität

- Definition: Die Kardinalität oder Mächtigkeit einer Menge gibt die Anzahl der Elemente einer Menge an.

- Schreibweise: $|\mathrm{M}| = \mathrm{x}$

- Beispiele: $M_1 = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\} \quad \Rightarrow \quad |M_1| = 6$

  $M_2 = \{1, 3, 9\} \quad \Rightarrow \quad |M_2| = 3$

  $M_3 = \{\,\} \quad \Rightarrow \quad |M_3| = 0$

2.2.6 Intervalle

- Definition: Intervalle sind Teilmengen von $\mathbb{R}$, die durch zwei Randpunkte begrenzt werden

- Endliche Intervalle (a<b) / Andere Schreibweise

$$[a,b] = \{x \mid a \le x \le b\} \qquad [a,b] = \{x \mid a \le x \le b\}$$
$$[a,b) = \{x \mid a \le x < b\} \qquad [a,b[= \{x \mid a \le x < b\}$$
$$(a,b] = \{x \mid a < x \le b\} \qquad]a,b] = \{x \mid a < x \le b\}$$
$$(a,b) = \{x \mid a < x < b\} \qquad]a,b[= \{x \mid a < x < b\}$$

- Unendliche Intervalle

$$[a,\infty) = \{x \mid a \le x < \infty\}$$
$$(a,\infty) = \{x \mid a < x < \infty\}$$
$$(-\infty,b) = \{x \mid -\infty < x < b\}$$
$$(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$$

- Beispiel: $[1{,}5[= \{x \mid 1 \le x < 5\}$

2.3 Mengen – Aufgaben

1. Gegeben sein die drei Mengen: $A = \{-3, -1,2,4\}$, $B = \{3,4,5,6\}$ und $C = \{-1,5,7,8\}$ berechnen Sie:

   a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $B \setminus C$ d) $C \setminus B$ e) $A \setminus (B \cap C)$ f) $A \cap \mathbb{N}$

   a) $\{4\}$ b) $\{-3, -1,2,3,4,5,6\}$ c) $\{3,4,6\}$ d) $\{-1,7,8\}$ e) A f) $\{2,4\}$

2. Geben Sie die folgenden Mengen möglichst einfach an

   a) $[1; 2] \setminus]1; 2[$ b) $[1; 2] \setminus \{1,2\}$ c) $]1; 2[\setminus [1; 2]$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\}$

   a) $\{1,2\}$ b) $]1; 2[$ c) $\emptyset$ d) $\mathbb{R} \setminus]-1; 1[$

2.3 Mengen – Aufgaben

3. Deferieren Sie folgende Mengen M für deren Elemente x
   a) x liegen in der Menge M1 oder Menge M2 aber nicht in der Schnittmenge M1 M2
   b) x liegen in der Menge M1 oder M2 aber nicht in der Menge M3
   c) x liegen in der Menge M1 aber nicht in der Schnittmenge von M1 und M2, und auch nicht in der Menge M3

   a) $M = (M_1 \cup M_2) \setminus (M_1 \cap M_2)$ b) $M = (M_1 \cup M_2) \setminus M_3$ c) $M = M_1 \setminus \left((M_1 \cap M_2) \cup M_3\right)$

4. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke
   a) $A \cup (A \setminus B)$ b) $A \cap (A \setminus B)$ c) $A \setminus (A \cup B)$ d) $B \cup (A \setminus B)$ e) $A \setminus (B \setminus A)$ f) $A \setminus (A \setminus B)$

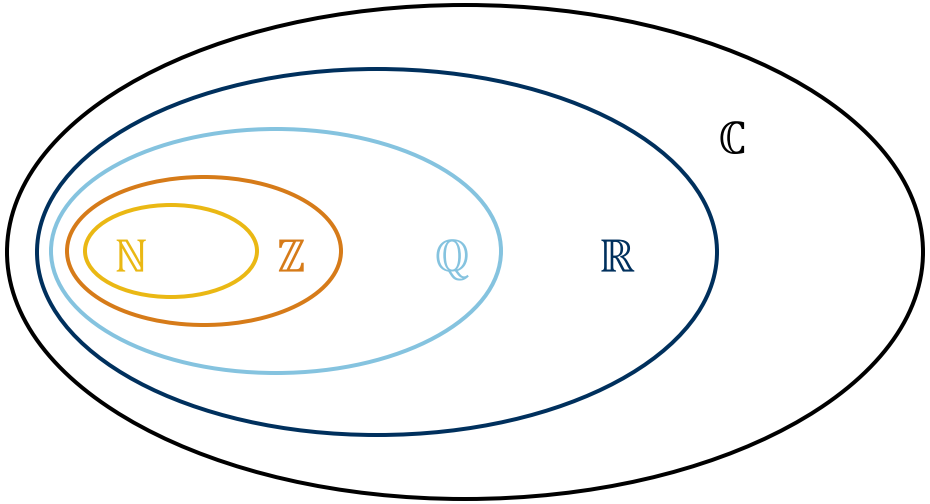
   a) A b) $A \setminus B$ c) $\emptyset$ d) $A \cup B$ e) A f) $A \cap B$

3 Zahlenmengen - Motivation

- „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.“ Leopold Kronecker

- Die Entwicklung der Zahlenmengen spiegelt die Entwicklung der Mathematik wider.

- Die Grundidee der Zahlenmengen findet sich in den Datentypen (bei statisch typisierten Programmiersprachen) in der Informatik wieder.
- Bei der Digitaliserung von z. B. Fotos werden Farbwerte von reellen Zahlen zu natürlichen Zahlen.



3 Natürliche Zahlen - Definition

- Die Natürlichen Zahlen sind alle positiven ganzen Zahlen.
- Es ist nicht eindeutig definiert, ob die 0 dazu gehört.

- Bezeichnung: $\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \dots\}$ $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4, \dots\}$

3.1.1 Natürliche Zahlen – Addition (+)

- unbeschränkt ausführbar: $a \epsilon \mathbb{N} \wedge \mathrm{b} \epsilon \mathbb{N} \Rightarrow c = a + b \epsilon \mathbb{N}$

- Kommutativität: $a + b = b + a$
- Assoziativität: $a + (b + c) = (a + b) + c$
- Monotonie: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

3.1.2 Natürliche Zahlen – Multiplikation (·)

- Definition: $a \cdot b = \underbrace{a + a + a + a + \cdots + a}_{\text{b-mal}}$ oder $a \cdot b = \underbrace{b + b + b + b + \cdots + b}_{\text{a-mal}}$

- unbeschränkt ausführbar: $a \in \mathbb{N} \wedge \mathrm{b} \in \mathbb{N} \Rightarrow c = a \cdot b \in \mathbb{N}$

- Kommutativität: $a \cdot b = b \cdot a$
- Assoziativität: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- Monotonie: $a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$
- Distributivität: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Ausklammern)

3.1.3 Natürliche Zahlen – Subtraktion (-)

- Bei der Subtraktion handelt es sich um die Umkehrung der Addition.

- **beschränkt** ausführbar: $b \leq a \Rightarrow c = a - b \in \mathbb{N}$

3.1.4 Natürliche Zahlen – Division (÷)

- Bei der Division handelt es sich um die Umkehrung der Multiplikation.

- **sehr beschränkt** ausführbar: b ist Teiler von $a \Rightarrow c = \frac{a}{b} \epsilon \mathbb{N}$

- Division durch 0 ist nicht möglich.

3.2 Ganze Zahlen - Definition

- Die Ganzen Zahlen erweitern die Natürlichen Zahlen um die negativen Zahlen.
- Motivation: Beschränktheit der Subtraktion.
- Bezeichnung: $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, \; 1, \; 2, \; 3, \; 4, \dots\}$
- Die Natürlichen Zahlen sind Teilmenge der Ganzen Zahlen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

3.2.1 Ganze Zahlen – Vorzeichenregeln und Absolutbetrag

- Vorzeichenregeln: $a + (-a) = 0$ $\qquad a - (-b) = a + b$

  $-(-a) = a$ $\qquad a \cdot (-b) = -a \cdot b$

- Absolutbetrag: $0 < |a| = \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$

- Folgerungen: $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ $\qquad |a + b| \leq |a| + |b|$

3.2.2 Ganze Zahlen – Rechenoperationen

- Addition, Multiplikation und Subtraktion sind analog zu den Natürlichen Zahlen unbeschränkt ausführbar.

- Es gelten die Kommutativität, Assoziativität und Distributivität.

- Nur die Division ist beschränkt ausführbar.

3.3 Rationale Zahlen - Definition

- Die Rationalen Zahlen erweitern die Natürlichen Zahlen um Zahlen, die als Bruch dargestellt werden können.

- Motivation: Beschränktheit der Division.

- Bezeichnung: $\mathbb{Q} = \left\{ x \middle| x = \frac{a}{b}\ , \quad a \in \mathbb{Z}, \quad b \in \mathbb{N}^* \right\}$

3.3.1 Rationale Zahlen – Rechenoperationen

- Addition: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \in \mathbb{Q}$
- Subtraktion: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \in \mathbb{Q}$
- Multiplikation: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \in \mathbb{Q}$
- Division: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \in \mathbb{Q}$

3.4 Reelle Zahlen - Definition

- Die Reellen Zahlen erweitern die Rationalen Zahlen um Zahlen, die nicht als Bruch dargestellt werden können (z. B. $\sqrt{2}$).

- Motivation: Unvollständigkeit der Rationalen Zahlen ($\mathbb{R}$ ist vollständig).

- Bezeichnung: $\mathbb{R}$

3.5 Binomische Formeln

- Die **binomischen Formeln** sind in der Algebra verbreitete Formeln, die zur Umformung von Produkten aus Binomen angewendet werden.
- Ein Binom ist ein mathematischer Ausdruck, der aus zwei Gliedern besteht, die addiert oder subtrahiert werden (z. B. (a + b) oder (a - b)).
- Man unterscheidet drei binomische Formeln:

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

3.5 Binomische Formeln

- Durch „Rückwärtsanwendung“ lassen sich binomische Formeln häufig zur Vereinfachung von Termen einsetzen.

- Dies ist häufig der Fall, wenn in einem Ausdruck 2 Quadratzahlen vorkommen:

  - $(4 - 9) = (2 + 3) \cdot (2 - 3)$
  - $(4 + 12 + 9) = (2 + 3)^2$

3.5 Binomische Formeln

- Es kann auch eine andere Potenz eines Binoms gebildet werden:

  - $(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + 1 \cdot b^3$
  - $(a+b)^4 = 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3 \cdot b + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a \cdot b^3 + 1 \cdot b^4$
  - $(a+b)^5 = 1 \cdot a^5 + 5 \cdot a^4 \cdot b + 10 \cdot a^3 \cdot b^2 + 10 \cdot a^2 \cdot b^3 + 5 \cdot a \cdot b^4 + 1 \cdot b^5$

3.5 Binomische Formeln

- Insgesamt ergibt sich bei den Koeffizienten ein Muster (Pascalsches Dreieck):

- Für die Berechnung der Koeffizienten gibt es eine Rechenvorschrift:

  $\binom{n}{k}$, sprich: n über k

  mit n := Zeile und k := Spalte

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1 \\
 & & & & & & & & \dots & & & & & & & &
\end{array}
$$

3.6 Zahlenräume – Aufgaben

1. Begründen Sie, ob die Gleichung für alle reellen Zahlen richtig ist.

   a) $a - b + c = -b + a + c$

   b) $a + b - c + d - e = a + b + d - c - e$

   c) $\mathrm{x} + \mathrm{y} - \mathrm{z} = x + z - y$

   d) $\mathrm{x} \cdot y \cdot z = y \cdot z \cdot x$

   e) $\mathrm{e} \cdot f - g \cdot h = g \cdot h - f \cdot e$

   f) $\mathrm{r} \cdot s + t \cdot u = u \cdot t + s \cdot r$

   g) $\mathrm{m} + n \cdot l = m \cdot n + l$

a) Ja

b) Ja

c) Nein

d) Ja

e) Nein

f) Ja

g) Nein

3.6 Zahlenräume – Aufgaben

2. Vereinfachen Sie die Terme.

a) $7a - [3a - (7 + 5b)] + [a - (4 - 6b)] - (2a + 7b) =$

b) $(a + b - c) \cdot (a - b - c) =$

c) $(49a^2 + 42a + 9) =$

d) $(144a^4 - 81b^2) \div (27b + 36a^2) =$

e) $3 \cdot (a + b + c) - 5 \cdot (a + b) - c - 2 \cdot (b - c - a) =$

f) $\frac{5}{18} + \frac{5}{6} - \frac{1}{3} + \frac{14}{27} + \frac{71}{81} =$

g) $\frac{a}{a-1} + \frac{a}{a+1} - 2 =$

h) $\frac{1-\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}} =$

a) $3a + 3 + 4b$

b) $a^2 - 2ac - b^2 + c^2$

c) $(7a + 3)^2$

d) $4a^2 - 3b$

e) $4(c - b)$

f) $\frac{176}{81}$

g) $\frac{2}{a^2-1}$

h) a

3.6 Zahlenräume – Aufgaben

3. Berechnen Sie ohne Benutzung des Taschenrechners und ohne Benutzung von gemischten Zahlen (gemischte Zahl = $1\frac{1}{2}$).

a) $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$ b) $\frac{9}{7}-\frac{16}{49}$ c) $\frac{1}{5}+\frac{3}{8}$

d) $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$ e) $\frac{5}{18}-2$ f) $3+\frac{19}{8}$

g) $\frac{2}{9}-\frac{5}{6}$ h) $\frac{7}{16}+\frac{11}{24}$ i) $\frac{11}{4}+\frac{5}{6}$

j) $\frac{16}{5}-\frac{7}{3}$ k) $\frac{3}{8}+\frac{6}{12}-\frac{2}{3}$ l) $\frac{3}{20}-\frac{4}{24}+\frac{31}{18}$

a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{47}{49}$ c) $\frac{23}{40}$

d) $\frac{17}{12}$ e) $-\frac{31}{18}$ f) $\frac{43}{8}$

g) $-\frac{11}{18}$ h) $\frac{43}{48}$ i) $\frac{43}{12}$

j) $\frac{13}{15}$ k) $\frac{5}{24}$ l) $\frac{307}{180}$

3.6 Zahlenräume – Aufgaben

4. Zusätzlich kürzen, wenn möglich.

a) $\frac{4}{6} \cdot \frac{9}{2}$

b) $7 \cdot \frac{6}{56}$

c) $\frac{12}{25} \cdot \frac{35}{18}$

d) $\frac{64}{49} \div \frac{40}{21}$

e) $\frac{\frac{32}{33}}{\frac{80}{77}}$

f) $\frac{\frac{25}{6}}{35}$

g) $\frac{40}{\frac{8}{9}}$

h) $\frac{4}{15} \cdot \frac{\frac{6}{12}}{\frac{18}{25}}$

i) $\frac{5}{4} - \frac{4}{3} \cdot \frac{\frac{3}{8}+\frac{5}{6}}{\frac{1}{4}}$

j) $\frac{4}{14} \cdot \frac{\frac{3}{8}}{\frac{6}{7}-\frac{5}{8}} - \frac{3}{2}$

k) $3 \cdot \frac{3}{\frac{36}{35}} \cdot \frac{\frac{4}{3}}{7} - 3$

a) 3

b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{14}{15}$

d) $\frac{24}{35}$

e) $\frac{14}{15}$

f) $\frac{5}{42}$

g) 45

h) $\frac{5}{27}$

i) $-\frac{187}{36}$

j) $-\frac{27}{26}$

k) $-\frac{4}{3}$

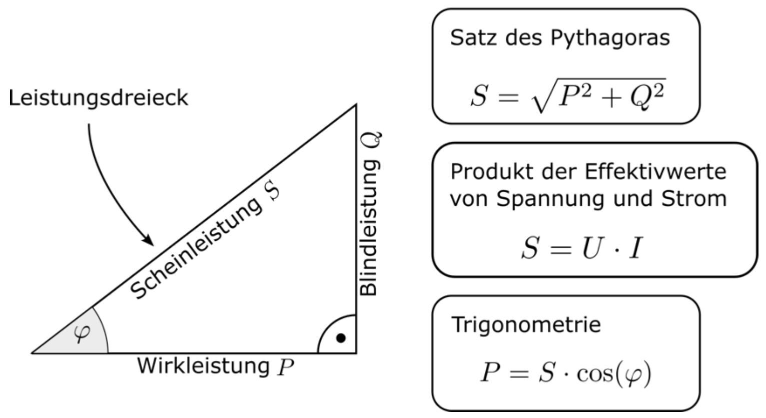
4.1 Potenzen / Wurzeln / Logarithmen

- Potenzen, Wurzeln und Logarithmen stellen wichtige grundlegende Rechenoperationen dar.
- Unser Zahlensystem (Dezimal) basiert auf Potenzen zur Basis 10.

$$\sqrt[2]{16} = 4 \Leftrightarrow 4^2 = 16 \Leftrightarrow \log_4 16 = 2$$

- Algorithmen werden so designt, dass die Komplexität logarithmisch und nicht linear ist.

Zusammenhang Scheinleistung, Blindleistung und Wirkleistung



4.1 Potenzen

- Eine Potenz ist im eigentlichen Sinne lediglich eine abkürzende Schreibweise von Multiplikationen, ebenso wie Multiplikation eine abkürzende Schreibweise der Addition ist.

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 5 \cdot 4$$

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1024 = 4^5$$

- Hierbei ist 4 die **Basis**, 5 der **Exponent** und 1024 das **Ergebnis**.

4.1 Potenzen

Durch Herunterzählen von Potenzen ergibt sich folgendes:

$$2^4 = 16$$
$$:2 \downarrow$$
$$2^3 = 8$$
$$:2 \downarrow$$
$$2^2 = 4$$
$$:2 \downarrow$$
$$2^1 = 2$$
$$:2 \downarrow$$
$$2^0 = 1$$
$$:2 \downarrow$$
$$2^{-1} = \frac{1}{2}$$
$$:2 \downarrow$$
$$2^{-2} = \frac{1}{2^2}$$

- Potenzen mit Exponenten 0 sind grundsätzlich = 1 (Ausnahme: 0^0 ist nicht definiert. 0^1 hingegen schon.)

4.1.1 Potenzen - Rechengesetze

- Potenzen mit gleicher Basis: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

- Potenzen mit ungleicher Basis, aber gleichem Exponenten: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

- Potenzen von Potenzen: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
  → In der Regel gilt: $(a^n)^m \neq a^{n^m}$

4.1.1 Potenzen - Rechengesetze

- Potenzen von Brüchen mit ungleicher Basis, aber gleichem Exponenten: $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

- Potenzen von Brüchen mit gleicher Basis, aber ungleichem Exponenten: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

- Negative Potenzen: $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

4.1.2 Potenzen – Aufgaben

1. Vereinfachen Sie so weit wie möglich und geben Sie jeweils an, welches Potenzgesetz Sie anwenden.

a) $x^2 \cdot x^3$

b) $y \cdot y^2 \cdot y^4$

c) $z^7 \cdot z^{-2} \cdot z^5$

d) $\frac{x^6}{x^3}$

e) $\frac{x^4}{x^{-7}}$

f) $\frac{x^{-2} \cdot x^6}{x^8}$

g) $\frac{(a+b)^3}{(a+b)^4} \cdot (a+b)^5$

h) $-x^4 \cdot y^5 \cdot (x^3y^4 - x^{-3}y^2)$

i) $(2x^4 + 3y^2)(4x^{-2} + 6y^4)$

j) $(x^2y + x^{-3}y^4)(x^5y^{-2} + x^6)$

a) x^5

b) y^7

c) z^{10}

d) x^3

e) x^{11}

f) $\frac{1}{x^4}$

g) $(a+b)^4$

h) $-x^7y^9 + xy^7$

i) $8x^2 + 12x^4y^4 + 12x^{-2}y^2 + 18y^6$

j) $x^7y^{-1} + x^8y + x^2y^2 + x^3y^4$

4.1.2 Potenzen – Aufgaben

2. Vereinfachen und eliminieren Sie dabei die negativen Exponenten.

a) $(x^2)^3 \cdot (2^2)^2$

b) $\left((x^4)^3\right)^2 \cdot (x^2)^2$

c) $\left((xy)^3\right)^2 \cdot \mathrm{x}^4 \cdot \mathrm{y}^{-2}$

d) $\dfrac{\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2\right)^3}{\mathrm{x}^4 y^{-5}}$

e) $\dfrac{(x^2)^{-3}\left((x+y)^2\right)^3}{(x+y)^5}$

f) $(x^2y^3)^4 \cdot x^{-3}y^2$

a) $16x^6$

b) x^{28}

c) $x^{10}y^4$

d) $\dfrac{x^2}{y}$

e) $\dfrac{(x+y)}{x^6}$

f) x^5y^{14}

4.1.2 Potenzen – Aufgaben

2. Vereinfachen und eliminieren Sie dabei die negativen Exponenten.

g) $\frac{(x^3y^2)^3}{(x^4y^3)^2}$

h) $\left(\frac{x^2}{y^{-3}}\right)^5 \cdot x^4y^3$

i) $\frac{\left(\frac{x^{-3}}{y^2}\right)^4}{\left(\frac{x^4}{y^5}\right)^2}$

j) $\left(\frac{x^2y^3}{z^4}\right)^2 \cdot \left(\frac{y}{x^{-2}z^4}\right)^{-3}$

k) $\frac{x^3\left(y^4z^2\right)^{-2}}{(x^2y^3z^2)^4} \cdot \left(\frac{x^4}{y^5z^3}\right)^{-2}$

g) x

h) $x^{14}y^{18}$

i) $\frac{y^2}{x^{20}}$

j) $\frac{y^3z^4}{x^2}$

k) $\frac{1}{x^{13}y^{10}z^6}$

4.1.2 Potenzen – Aufgaben

3. Lösen Sie folgende Terme:

a) $\frac{a^{7x+5y}}{a^{4x-5y}} - \frac{a^{6y+8x}}{a^{5x-4y}} =$

b) $6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 5\left(-\frac{2}{3}\right)^2 =$

c) $\left(\frac{x^3}{y^{-1}}\right)^{-2} \cdot \frac{x^5}{y^{-3}} =$

d) $\frac{1-2x^2}{\mathrm{x^n}} - \frac{3x-2}{x^{n-2}} + \frac{3}{x^{n-3}} =$

e) $a^{x+y} \cdot a^{x-y} =$

a) 0

b) 2

c) $\frac{y}{x}$

d) $\frac{1}{x^n}$

e) a^{2x}

4.2 Wurzeln - Definition

- Bisher: Probleme der Form: $a^b = c$ mit gegebenen $a,\ b\ \in \mathbb{R}$

- Nun: Lösung von Problemen der Form: $a^b = c$ mit gegebenen $b,\ c\ \in \mathbb{R}$, z. B. $a^3 = 8$

- Durch Einführung des Wurzeloperators lässt sich das Problem umformulieren: $\sqrt[3]{8} = a$
  Die Wurzel beantwortet somit die Frage, was 3-mal mit sich selbst genommen 8 ergibt.

- Begrifflichkeiten: c wird als **Radikand**, b als **Wurzelexponent** bezeichnet.

4.2 Wurzeln - Definition

- Bei Quadratwurzeln ($b = 2$) wird der Wurzelexponent in der Regel nicht angegeben:

$$\sqrt[2]{9} = \sqrt{9} = 3$$

- Je nach Aufgabenstellung und nach realen Problemen wird nicht nur die positive Lösung gesucht. Da Potenzen bei graden Exponenten immer positiv sind (zumindest im reellen), besitzt $\sqrt{9}$ noch die weitere Lösung -3. Damit gilt:

$$\sqrt{9} = \pm 3$$

4.2 Wurzeln - Definition

- Im reellen Zahlenraum sind Wurzeln von negativen Radikanden nicht definiert. $\sqrt{-3}$ besitzt beispielsweise keine reelle Lösung.

- Es gibt jedoch Lösungen im komplexen Zahlenraum $\mathbb{C}$ → Kapitel 5

4.2.1 Wurzeln - Rechenregeln

- Für alle Rechenregeln gilt: $m, n \in \mathbb{N}^*, \quad a,\ b \geq 0$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad (b > 0)$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

4.2.1 Wurzeln – Aufgaben

1. Vereinfachen Sie den Term und schreiben Sie nicht ganzzahligen Exponenten wieder als Wurzel.

a) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{2}{5}}}$

b) $\left(a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(a^{-\frac{1}{4}}\right)^{2}$

c) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[5]{b}$

d) $\dfrac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a^3}}{\sqrt[3]{a}}$

e) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2} \cdot x^2}{\sqrt[4]{25x^3}}$

f) $\sqrt{ab} \cdot \sqrt[3]{27ab}$

g) $\sqrt{4a^2b^4c^6} \cdot a^3b^2$

h) $\dfrac{\sqrt[5]{x^7y^4}}{\sqrt[4]{16x^2y^3}}$

a) $\dfrac{\sqrt[12]{a^{17}}}{\sqrt[5]{b^2}}$

b) $\sqrt[4]{a} \cdot b$

c) $\sqrt[12]{a^7} \cdot \sqrt[10]{b^7}$

d) $\sqrt[3]{a^5}$

e) $\dfrac{\sqrt[12]{x^{23}}}{\sqrt{5}}$

f) $3 \cdot \sqrt[6]{a^5b^5}$

g) $2a^4b^4c^3$

h) $\frac{1}{2}\sqrt[10]{x^9} \cdot \sqrt[20]{y}$

4.2.1 Wurzeln – Aufgaben

1. Vereinfachen Sie den Term und schreiben Sie die nicht ganzzahligen Exponenten wieder als Wurzel.

i) $\sqrt[4]{\frac{x^2}{y^3}} \cdot \sqrt[5]{\frac{y^2}{x^3}}$

j) $\sqrt[3]{\frac{x^2}{y^{-4}z^2}} \cdot \sqrt[3]{x^2y^4z}$

k) $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{x^{-4}}}}{\sqrt{x^2}} \cdot x$

l) $\frac{\sqrt{x\,\sqrt[3]{y}}\cdot\left(\sqrt[5]{y}\cdot x^2\right)^{-3}}{\sqrt{x}\cdot x^{-2}}$

m) $\left(\sqrt[4]{x^3}+\sqrt{x^3}\right)^2$

n) $\frac{\sqrt{x+y}\cdot\sqrt[3]{(x+y)^2\cdot x}}{\sqrt{x^4}\cdot(x+y)}$

o) $\frac{\sqrt[3]{a^4}-\sqrt{a^2}}{a^3}$

i) $\frac{1}{\sqrt[10]{x}\cdot\sqrt[20]{y^7}}$

j) $\frac{\sqrt[3]{x^4}\,\sqrt[3]{y^8}}{\sqrt[3]{z}}$

k) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

l) $\frac{1}{x^4\cdot\sqrt[30]{y^{13}}}$

m) $\sqrt{x^3}+2\cdot\sqrt[4]{x^9}+x^3$

n) $\frac{\sqrt[6]{x+y}}{\sqrt[3]{x^5}}$

o) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^5}}-\frac{1}{a^2}=\frac{\sqrt[3]{a}-1}{a^2}$

4.2.1 Wurzeln – Aufgaben

2. Berechnen Sie:

a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}} \cdot \sqrt{\sqrt[6]{x^{10}}} + \sqrt[9]{y^6 \sqrt[4]{y^{12}}}$ b) $a \cdot \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}}$ d) $a \cdot b \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}$

e) $\sqrt[a]{\left(\frac{n^{x+a}}{n^x}\right)^c}$ f) $(n+x)^{3/4} \cdot \sqrt[4]{(n+x)^5}$ g) $16\sqrt{a^6 \cdot b^7} \div 4\sqrt{a^4 \cdot b^5}$ h) $\sqrt[3]{x\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}$

a) $\mathrm{x} + \mathrm{y}$ b) $\sqrt{a^2 + b^2}$ c) $\sqrt[6]{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}}$ d) $\sqrt[3]{\mathrm{ab}(b^2 - a^2)}$ e) n^{c} f) $(n+x)^2$ g) $4\mathrm{ab}$ h) $-3\sqrt{x}$

4.3 Logarithmen - Definition

- Bisher: Probleme der Form: $a^b = c$ mit gegebenen $a,\ b\ \in \mathbb{R}$

- Nun: Lösung von Problemen der Form: $a^b = c$ mit gegebenen $a,\ c\ \in \mathbb{R}$,   z. B. $2^b = 8$

- Durch Einführung des Logarithmus lässt sich das Problem umformulieren: $log_2 8 = b$
  Der Logarithmus beantwortet somit die Frage, wie oft die 2 mit sich selbst Mal genommen werden muss, um das Ergebnis 8 zu erhalten.

- Begrifflichkeiten: a wird als **Basis**, b als **Exponent** und c als **Numerus** bezeichnet.

4.3.1 Logarithmen - Rechenregeln

- Für alle Rechenregeln gilt: $\mathrm{a},\ \mathrm{u},\ \mathrm{v} > 0; \quad k \in \mathbb{R}; \quad n \in \mathbb{N}^*$

$$log_a(u \cdot v) = log_a(u) + log_a(v)$$

$$log_a\left(u^k\right) = k \cdot log_a(u)$$

$$log_a\left(\frac{u}{v}\right) = log_a(u) - log_a(v)$$

$$log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \cdot log_a(u)$$

Basiswechsel $(a \to b)$: $\log_a u = \frac{\log_b u}{\log_b a}$

4.3.2 Logarithmen – besondere Logarithmen

- Zehnerlogarithmus bzw. dekadischer Logarithmus zur Basis 10: $log_{10}(u) := \lg(u)$

- Zweierlogarithmus bzw. binärer Logarithmus zur Basis 2: $log_2(u) := lb(u)$ oder $ld(u)$

- Natürlicher Logarithmus (logarithmus naturalis) zur Basis e: $log_e(u) := \ln(u)$

4.3.2 Logarithmen – besondere Logarithmen

$$log_b 1 = 0$$

$$log_a a = 1$$

$$log_b 0 \to -\infty$$

$$log_a a^x = x$$

4.3.3 Logarithmen – Aufgaben

1. Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

   a) $\log_3 9$ b) $\log_2 8$ c) $\log_2 \sqrt{2}$ d) $\log_7 \frac{1}{49}$ e) $\ln(e)$ f) $\lg 100$

2. Berechnen Sie:

   a) $\frac{1}{2}\lg a + 2\lg c - \frac{1}{3}\left(\lg b^3 + \lg a^{3/2}\right)$

   b) $\frac{1}{2}\lg(a^2 - ab + b^2) + \frac{1}{2}\lg(a+b)$

   c) $\lg\left(\frac{a}{b}\right) + \lg(ab) - 2\lg(a-b)$

   d) $\log_5 x = -2$

   a) $\lg\left(\frac{c^2}{b}\right)$

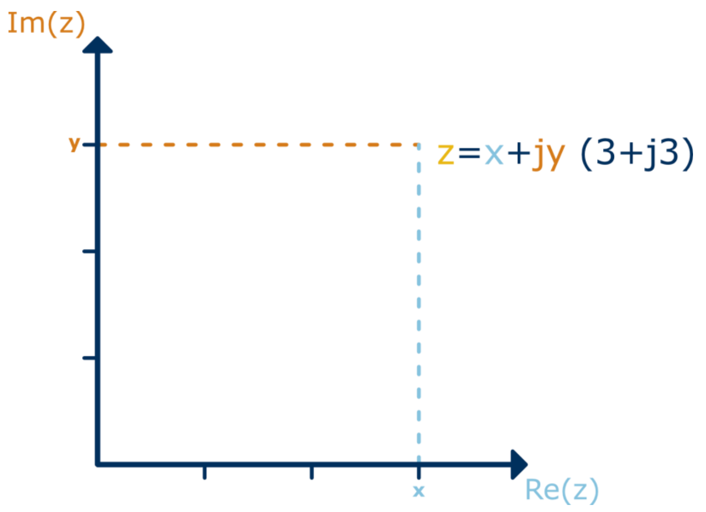
   b) $\lg\sqrt{a^3 + b^3}$

   c) $\lg\left(\frac{a}{a-b}\right)^2$

   d) $\frac{1}{25}$

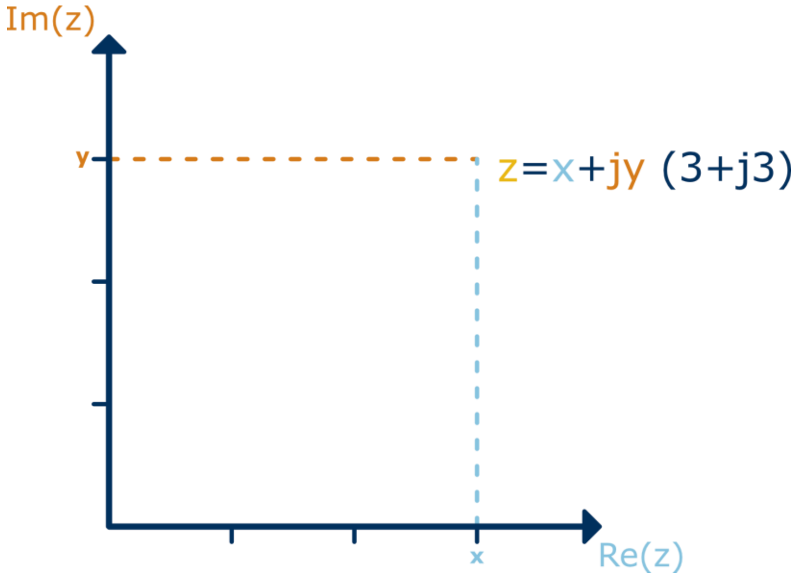
5 Exkurs – Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

- Die Komplexen Zahlen erweitern die Reellen Zahlen um Lösungen der Wurzel aus negativen Zahlen. Hierzu wird die imaginäre Einheit j definiert: $j^2 = -1 \;\longrightarrow j = \sqrt{-1}$
- Eine Komplexe Zahl $z = x + jy$ setzen sich aus einem Realteil (Re(z)) und einem Imaginärteil (Im(z)) zusammen und wird nicht auf einem Zahlenstrahl, sondern in der **komplexen Zahlenebene** (Gaußsche Zahlenebene) angeordnet.



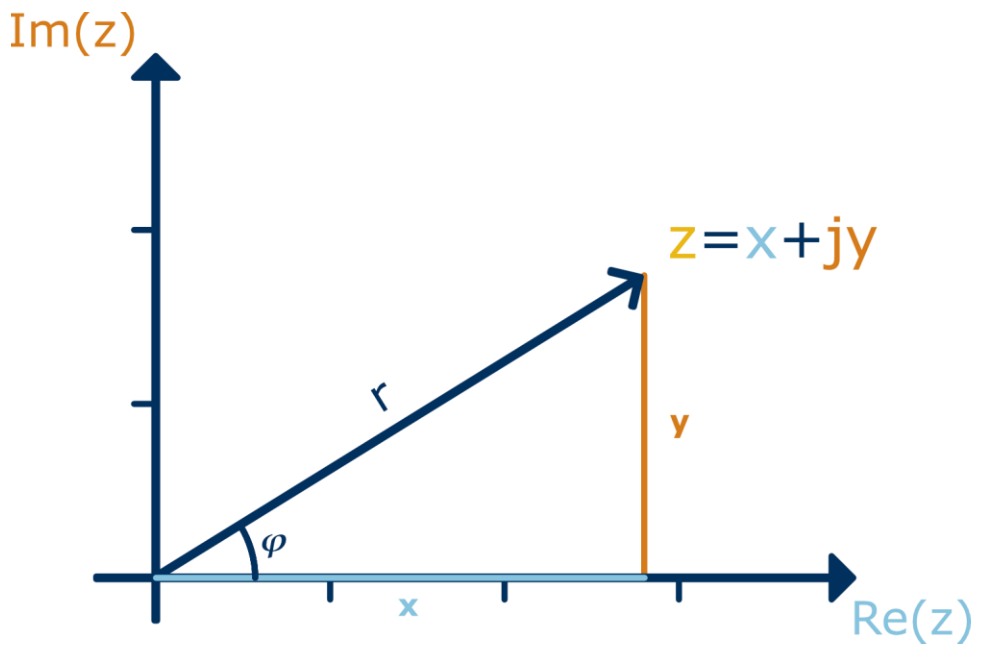
5 Exkurs – Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

- Die Punkte auf der reellen Achse bilden die Menge der **Reellen Zahlen** ($z = x + j \cdot 0$).
- Die Punkte auf der imaginären Achse die **Imaginären Zahlen** ($z = 0 + j \cdot y$).
- Komplexe Zahlen können einfach in einem **kartesischen Koordinatensystem** eingezeichnet werden.



5 Exkurs – Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

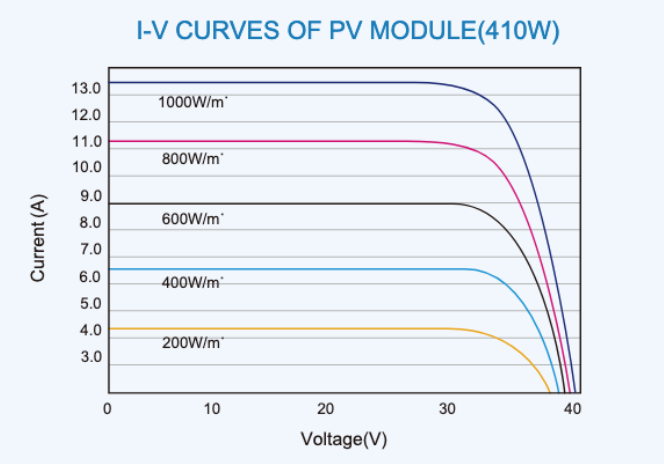
- Die komplexe Zahl $\mathrm{z} = x + jy$ kann auch durch **Polarkoordinaten** $(\mathrm{r},\ \varphi)$ beschrieben werden. Diese sind festgelegt durch den **Betrag** $r = |z|$ (Länge des zugehörigen Zeigers) und den **Winkel** φ zur positiven reellen Achse.



6 Gleichungen - Motivation

Beschreibung von technischen Sachverhalten mithilfe von (Funktions-)Gleichungen:

- Kennlinie eines PV-Moduls:
- Energiegehalt einer strömenden Flüssigkeit: **Eges = E pot + E kin + E p**



6 Gleichungen - Definition

- Gleichungen sind Aussagen, denen man einen Wahrheitsgehalt geben kann.

- Sehr einfache Gleichungen enthalten keine unbekannten Elemente (Variablen). Für solche ist der Wahrheitswert unmittelbar ablesbar:

$$4 + 3 = 7 \Rightarrow \text{wahr} \qquad\qquad 12 + 2 = 3 \Rightarrow \text{falsch}$$

6 Gleichungen - Definition

- Aufwendiger (interessanter) wird es durch die Einführung von Variablen:
$$4 + x = 7$$

- Es können unendlich viele Werte für x eingesetzt werden, aber nur für einen Wert ($x = 3$) ist die Gleichung wahr.
- Beim Umgang mit Gleichungen beschäftigt man sich häufig mit der Frage, für welche Werte die Gleichung den Wahrheitswert wahr annimmt. Hierzu wird die Gleichung „gelöst“.

- Gleichungen können mehrere Variablen aufweisen!

6 Gleichungen – Klassifizierung von Gleichungen

Es gibt unterschiedliche Klassen von Gleichungen. Diese werden anhand verschiedener Eigenschaften eingeordnet. Z. B. nach der ...

- Anzahl der Variablen
- Art der Verknüpfung der Variablen und Zahlen

- **algebraische Gleichungen** enthalten rationale Rechenoperationen (+, -, *, /) und das Wurzelziehen (Radizieren) endlich oft. Die Variable kommt hierbei nicht im Exponenten vor.
  $a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x^1 + a_0 = 0,$ mit $n \in \mathbb{N},\ \ a_i \in \mathbb{R}$

- **transzendente Gleichungen**: $e^x - 1 = x$ $\sin(2x) + \ln x = 0$

6.1 Lineare Gleichungen

- Lineare Gleichungen sind Gleichungen, in denen die Variable nur mit der Potenz 1 vorkommt:

$$5x + 7 = 17$$

- Lineare Gleichungen haben immer exakt eine Lösung, die sich durch äquivalente Umformungen finden lässt: Rechnung

- Das Äquivalenzzeichen ist das gleiche wie aus der Logik, es bedeutet, dass die Aussage weiterhin äquivalent, also gleich ist. Sie ist auch wieder umkehrbar.

6.2 Quadratische Gleichungen

- Quadratische Gleichungen sind Gleichungen, in denen die Variable maximal mit der Potenz 2 vorkommt:

$$x^2 = 4 \qquad\qquad x^2 + 2x + 1 = 0$$

- Quadratische Gleichungen haben im Zahlenraum der Reellen Zahlen entweder keine oder zwei Lösungen. Diese lassen sich nur in den seltensten Fällen durch äquivalente Umformungen finden: Rechnung

6.2 Quadratische Gleichungen

- Quadratische Gleichungen sind Gleichungen, in denen die Variable maximal mit der Potenz 2 vorkommt:

$$x^2 = 4 \qquad\qquad x^2 + 2x + 1 = 0$$

- Im Allgemeinen lassen sich quadratische Gleichungen mithilfe der pq-Formel lösen:

1. Überführung der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ in die Form $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 + px + q = 0$
2. Bestimmung der Lösungen (falls vorhanden) mithilfe der Formel: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

6.2 Quadratische Gleichungen

- Mithilfe des Ausdrucks unter der Wurzel (Diskriminante) lässt sich frühzeitig erkennen, ob die Gleichung lösbar ist, und wie viele Lösungen vorhanden sind.

- $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$: zwei verschiedene reelle Lösungen
- $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$: eine (zwei identische) Lösungen
- $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$: keine reelle Lösung (komplexe Lösung)

6.3 Gleichungen höheren Grades

- Bei Gleichungen vom Grad größer 2 ist eine analytische Lösungsfindung schwierig oder sogar unmöglich:

- $n = 3, 4$: analytische Lösungen möglich, jedoch in der Praxis umständlich.

- $n > 4$: ausschließlich numerisch lösbar.

6.4 Gleichungen – Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichungen.

a) $2x - 3 = 4$

b) $7x - 5 = 2x - 10x + 3$

c) $\frac{3-4x}{6} + 5x = 7x$

d) $4x + 5 = 2(2x - 3)$

e) $2(3x + 4) = \frac{18x+24}{3}$

a) $\mathbb{L} = \left\{\frac{7}{2}\right\}$

b) $\mathbb{L} = \left\{\frac{8}{15}\right\}$

c) $\mathbb{L} = \left\{\frac{3}{16}\right\}$

d) $\mathbb{L} = \emptyset$

e) $\mathbb{L} = \mathbb{R}$

6.4 Gleichungen – Aufgaben

2. Lösen Sie die Gleichungen nach x auf und geben Sie die Lösungsmenge an.

a) $\frac{x-a}{a} = 24a$

b) $6\mathrm{b} = \frac{3b-x}{4b} + b$

c) $3\mathrm{c} = (c-x) \cdot c$

d) $\frac{ax}{a+c} = 2a$

e) $4a = b \cdot \frac{3x}{a}$

f) $2\mathrm{b} - \frac{\mathrm{x+a}}{a-b} \cdot b = 3b$

g) $\mathrm{ax} + \mathrm{bx} = 3$

h) $\mathrm{ax} = \frac{2x}{b} + 4$

i) $a + bx = \frac{2cx+4x}{a}$

j) $\frac{3ax-12}{4b} = (5x-a) \cdot 3b$

a) $\mathbb{L} = \{24a^2 + a\}$

b) $\mathbb{L} = \{-20b^2 + 3b\}$

c) $\mathbb{L} = \{c - 3\}$

d) $\mathbb{L} = \{2(a + c)\}$

e) $\mathbb{L} = \left\{\frac{4}{3} \cdot \frac{a^2}{b}\right\}$

f) $\mathbb{L} = \{b - 2a\}$

g) $\mathbb{L} = \left\{\frac{3}{a+b}\right\}$

h) $\mathbb{L} = \left\{\frac{4b}{ab-2}\right\}$

i) $\mathbb{L} = \left\{\frac{a^2}{2c+4-ab}\right\}$

j) $\mathbb{L} = \left\{\frac{4(1-ab^2)}{a-20b^2}\right\}$

6.4 Gleichungen – Aufgaben

3. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichungen.

a) $x^2 + x - 6 = 0$

b) $4x(2x+5) = 14x\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{7}\right) + 21x + 40$

c) $2x^2 + 7x - 4 = 0$

d) $-3x^4 + 9x^2 - 6 = 0$

e) $6x^2(2x^4 - 3x^2) - 3 = 21x^3 - 3x^3(4x^3 + 5x) - 3x^4$

a) $\mathbb{L} = \{-3{,}2\}$

b) $\mathbb{L} = \{-5{,}8\}$

c) $\mathbb{L} = \left\{-4, \frac{1}{2}\right\}$

d) $\mathbb{L} = \left\{-\sqrt{2}, -1{,}1, \sqrt{2}\right\}$

e) $\mathbb{L} = \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$

6.4 Gleichungen – Aufgaben

4. Lösen Sie die Gleichungen nach x auf.

a) $\frac{3}{x} = 4$ b) $a = \frac{b}{2x} + 4$ c) $\frac{1}{x} = \frac{2}{a} + \frac{b}{3}$ d) $\frac{3a+6b}{x} = \frac{24c}{5}$

a) $x = \frac{3}{4}$ b) $x = \frac{b}{2(a-4)}$ c) $x = \frac{3a}{6+ab}$ d) $x = \frac{5(a+2b)}{8c}$

5. Lösen Sie die Gleichungen nach x auf.

a) $(3x-7)\cdot(x+2) = 0$ b) $3x^2 + 5x = 0$ c) $x^2 + 5x + 6 = 0$

d) $3x^2 - 5x + 4 = 0$ e) $(x-1)^2 \cdot (x+2) = 4 \cdot (x+2)$

f) Gegeben sei $x^2 + 2 \cdot (k+2) \cdot x + 9k = 0$, für welches k fallen die Nullstellten zusammen?

a) $x_1 = \frac{7}{3}, x_2 = -2$ b) $x_1 = 0, x_2 = -\frac{5}{3}$ c) $x_1 = -2, x_2 = -3$ d) *komplexe Lösung*

e) $x_1 = -2, x_2 = 3, x_3 = -1$ f) $k_1 = 1\,, k_2 = 4$

6.5 Wurzelgleichungen

- Wurzelgleichungen sind Gleichungen, in denen die Variable (auch) in einer Wurzel vorkommt:

$$\sqrt{x+1}+1=3$$

- Wurzelgleichungen lassen sich stets durch ein algorithmisches Lösungsverfahren lösen:

1. Den Wurzelausdruck auf einer Seite des Gleichheitszeichens isolieren.
2. Quadrieren der gesamten Gleichung.
3. Die Variable auf einer Seite des Gleichheitszeichens isolieren.
4. Probe durchführen.

6.6.1 Wurzelgleichungen – Aufgaben

1. Lösen Sie die Gleichungen und führen Sie die Probe durch.

a) $3 - 2\sqrt{x} = -4$

b) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+8} = 9$

c) $\sqrt{16 + 3\sqrt{7x-5}} = 2\sqrt{7}$

d) $\sqrt{x+3} + \sqrt{2(x-4)} = \frac{15}{\sqrt{x+3}}$

e) $\sqrt{2x-3} + 5 - 3x = 0$

f) $\sqrt{x+15} - \sqrt{10-x} = 1$

g) $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} - \sqrt{8x+1} = 0$

h) $\sqrt[3]{28 - \sqrt{2x-3}} = 3$

a) $x = \frac{49}{4}\ (w)$

b) $x = 17\ (w)$

c) $x = 3\ (w)$

d) $x_1 = 6\ (w),\ x_2 = -28 (f)$

e) $x_1 = 2\ (w),\ x_2 = \frac{14}{9} (f)$

f) $x_1 = 1\ (w),\ x_2 = -6 (f)$

g) $x_1 = -\frac{1}{17}\ (f),\ x_2 = 3 (w)$

h) $x = 2\ (w)$

6.6.2 Wurzelgleichungen – Aufgaben

2. Bestimmen Sie die Lösungsmengen.

a) $\sqrt{x+42} = x$

b) $\sqrt{3x^2+2} = \sqrt{4x^2-7}$

c) $\sqrt{8x+20} = 5x-4$

d) $2x + \sqrt{41-8x} = 5$

e) $6x + 4 + \sqrt{-30x+26} = 9x - 1$

f) $\sqrt{-12x} - \sqrt{-8x+1} = \sqrt{2x+7}$

g) $\sqrt{9x+9} - \sqrt{7x-7} = \sqrt{-x+12}$

h) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} = 32$

i) $\frac{32}{\sqrt[3]{x^2}} = 2\sqrt[3]{x^2}$

j) $\frac{3x-2}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} - 1$

a) $x_1 = 7\ (w),\ x_2 = -6\ (f)$

b) $x_{1,2} = \pm 3\ (w)$

c) $x_1 = 2\ (w), x_2 = -\frac{2}{25}\ (f)$

d) $x_1 = -1\ (w),\ x_2 = 4\ (w)$

e) $x_{1,2} = \pm\frac{1}{3}\ (f)$

f) $x_1 = -3\ (w),\ x_2 = -\frac{3}{25}\ (f)$

g) $x_1 = 8\ (w),\ x_2 = \frac{44}{37}\ (w)$

h) $x = 64\ (w)$

i) $x_{1,2} = \pm 8\ (2)$

j) $x_1 = 1\ (w),\ x_2 = 4\ (f)$

6.7 Logarithmusgleichungen

- Logarithmusgleichungen sind Gleichungen, in denen die Variable (auch) im Numerus eines Logarithmus vorkommt:

$$\lg x = 10$$

- Logarithmusgleichungen lassen sich durch ein algorithmisches Lösungsverfahren lösen:

1. Den Logarithmus auf einer Seite des Gleichheitszeichens isolieren.
2. Potenzieren der gesamten Gleichung
3. Die Variable auf einer Seite des Gleichheitszeichens isolieren.

6.7 Logarithmusgleichungen – Aufgaben

1. Berechnen Sie die Lösung für x.

a) $\log_2 x = 5$

b) $\log_x 4 = 2$

c) $\log_x 27 = 3$

d) $\log_x 4 = \frac{2}{3}$

e) $\log_3 x = 2$

f) $\log_x 81 = 4$

g) $\log_{10} x = 1$

h) $\operatorname{lb} 128 = x$

i) $\ln x = 2$

j) $\ln x = 5$

a) $\mathrm{x} = 32$

b) $\mathrm{x} = 2$

c) $\mathrm{x} = 3$

d) $\mathrm{x} = 8$

e) $\mathrm{x} = 9$

f) $\mathrm{x} = 3$

g) $\mathrm{x} = 10$

h) $\mathrm{x} = 7$

i) $\mathrm{x} = e^2$

j) $\mathrm{x} = e^5$

6.7 Logarithmusgleichungen – Aufgaben

2. Berechnen Sie die Lösung für x.

a) $\log_3 x + \log_3 x = 4$

b) $\log_5(x) + \log_5(x^2) = 3$

c) $2\log_9(x) + \log_9(x) = 3$

d) $3\log_2(x) - 2\log_2(2x) = -3$

e) $4\log_3(3x) + 2\log_3(4x) = \log_3(48x^3)$

f) $\log_2(x) \cdot \log_2(16) = 4$

g) $6\ln x = 2\ln(25x) + 8$

a) $\mathrm{x} = 9$

b) $\mathrm{x} = 5$

c) $\mathrm{x} = 9$

d) $\mathrm{x} = \frac{1}{2}$

e) $\mathrm{x} = \frac{1}{3}$

f) $\mathrm{x} = 2$

g) $\mathrm{x} = 5e^2$

6.8 Ungleichungen

- Eine Ungleichung beschreibt zwei Terme, die nicht wie bisher genau gleich seien sollen. Die Beziehung der Terme wird über andere Relationszeichen ($<$, $>$, $\leq$, $\geq$) beschrieben.
- Als Lösung von Ungleichungen ergeben sich keine eindeutigen Lösungen, sondern Intervalle, in denen die Ungleichung den Wahrheitswert „wahr“ annimmt.

$$x + 2 > -8$$

6.8 Ungleichungen

$$x + 2 > -8$$

- Zum Lösen von Ungleichungen können folgende Umformungen genutzt werden:

1. Addition oder Subtraktion eines Terms auf beiden Seiten der Ungleichung.
2. Multiplikation oder Division eines Terms auf beiden Seiten der Ungleichung ...
    a. mit einer positiven Zahl ohne Einschränkungen.
    b. mit einer negativen Zahl mit „Drehung“ des Relationszeichens ($< \leftrightarrow >$, $\leq \leftrightarrow \geq$).

6.7.2 Ungleichungen – Aufgaben

1. Berechnen Sie die Lösungsmengen.

a) $2x - 3 > 9$

b) $4x - 2 \leq 6$

c) $-5x + 2 < -4x + 7$

d) $-6x + 3 \geq 6$

e) $-9x + 4 \geq -2$

f) $x^2 - x - 2 \leq 0$

g) $x^2 + x - 1 \geq 0$

h) $\frac{x-1}{x+1} < 1$

a) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 6\}$

b) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$

c) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -5\}$

d) $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{1}{2}\right\}$

e) $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{2}{3}\right\}$

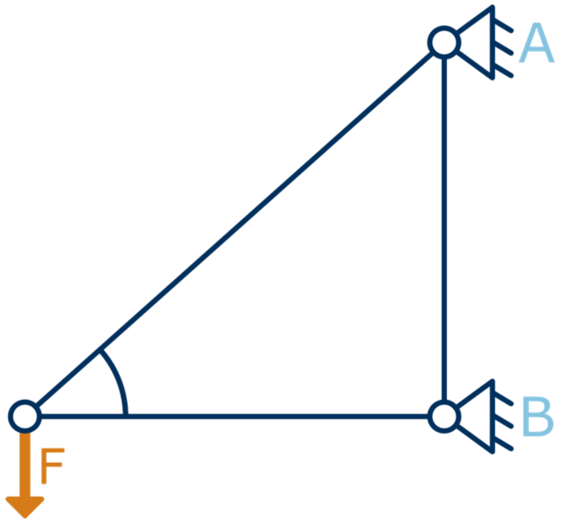
f) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 2\}$

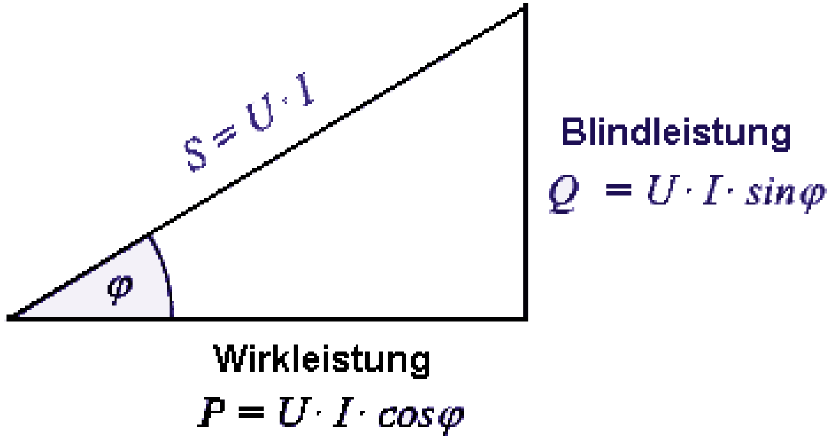
g) $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}} \vee x \geq -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}\right\}$

h) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

7 Trigonometrische Formeln - Motivation

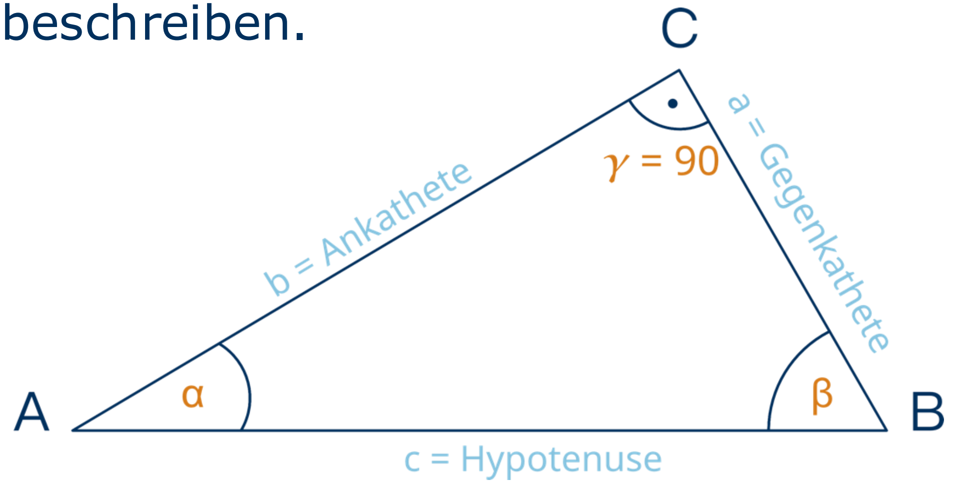
- Wechselstromrechnung
- Statik





7 Trigonometrische Formeln

- Mithilfe der **Trigonometrischen Formeln** (Funktionen) lassen sich Zusammenhänge in rechtwinkligen Dreiecken beschreiben.



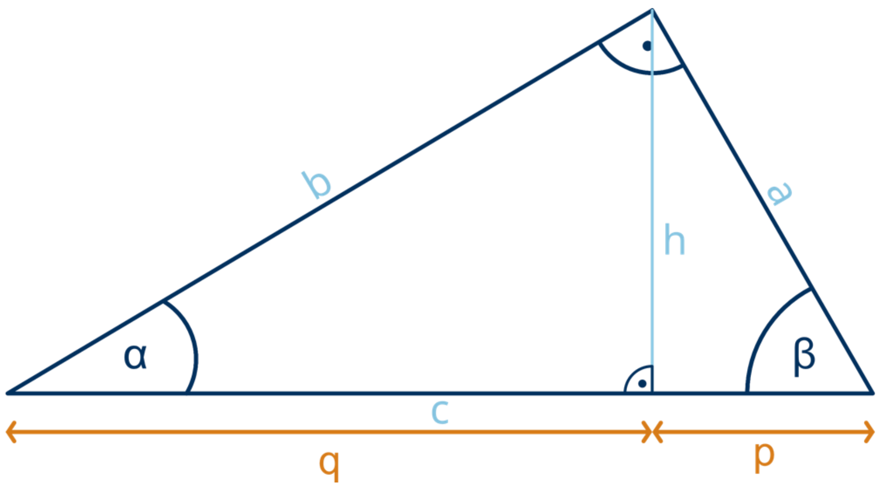
$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete von }\alpha}{\text{Hypotenuse von }\alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete von }\alpha}{\text{Hypotenuse von }\alpha}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete von }\alpha}{\text{Ankathete von }\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{b}{a} = \frac{\text{Ankathete von }\alpha}{\text{Gegenkathete von }\alpha}$$

7 Trigonometrische Formeln



Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

Höhensatz: $h^2 = p \cdot q \mid \sin\alpha = \frac{h}{b} \mid \sin\beta = \frac{h}{a}$

Fläche: $A = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{h \cdot c}{2}$

Kathetensatz: $a^2 = p \cdot c \quad b^2 = q \cdot c$

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

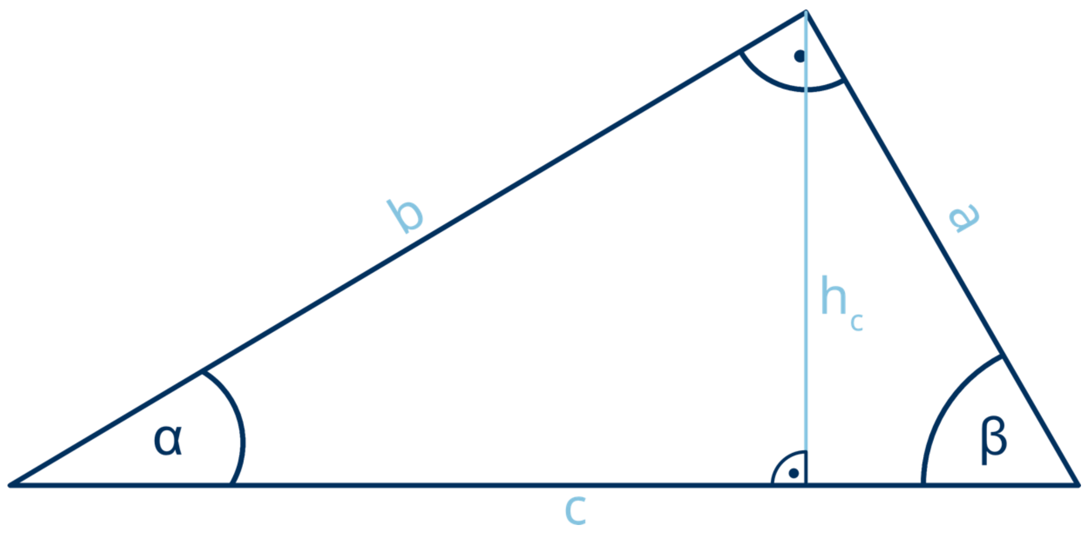
Sinussätze: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

7.1 Trigonometrische Formeln – Aufgaben

(gerundet auf drei Nachkommastellen)

1. Vom dargestellten Dreieck sind $\beta = 65^{\circ}$ und h_c = 22m bekannt.

   Berechnen Sie die Länge a, b und c, den Winkel α und den Flächeninhalt A.



$\alpha = 25^{\circ}$ $(\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ})$

a = 24,274 m $(\sin\beta = \frac{h}{a})$

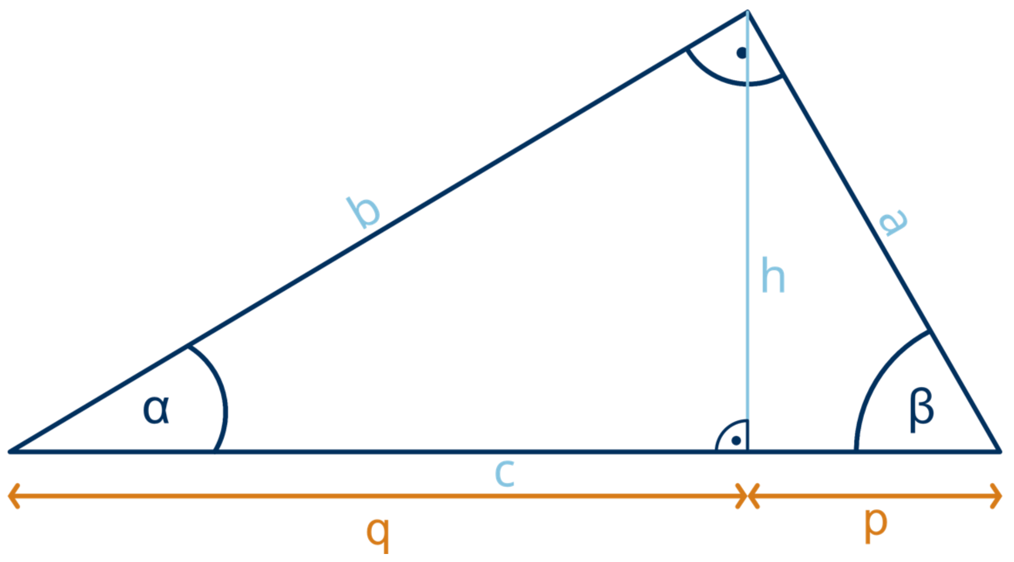
b = 52,056 m $(\tan\alpha = \frac{a}{b})$

c = 57,437 m $(a^2 + b^2 = c^2)$

A = 631,8 m² $(A = \frac{a \cdot b}{2})$

7.1 Trigonometrische Formeln – Aufgaben

2. Berechnen Sie jeweils die fehlenden Seiten und Innenwinkel zu den gegebenen Angaben.



a) $p = 4{,}93$ cm | $\beta = 70{,}3°$

b) $p = 28$ cm | $q = 63$cm

c) $a = 12{,}5$ cm | $p = 4{,}4$ cm

d) $h = 9{,}1$ cm | $q = 9$ cm

e) $a = 27{,}8$ cm | $A = 373\ \text{cm}^2$

7.1 Trigonometrische Formeln – Aufgaben

(gerundet auf drei Nachkommastellen)

2. Berechnen Sie jeweils die fehlenden Seiten und Innenwinkel zu den gegebenen Angaben.

a) p = 4,93 cm | β=70,3°, $\alpha = 19{,}7°,\ a = 14{,}625cm,\ b = 40{,}847cm,\ c = 43{,}386cm$

b) p = 28 cm | q = 63cm, $c = 91cm,\ h = 42cm,\ a = 50{,}478,\ b = 75{,}717,\ \alpha = 33{,}69°,\ b = 56{,}31°$

c) a = 12,5 cm | p = 4,4 cm, $h = 11{,}7cm,\ c = 35{,}511,\ b = 33{,}238,\ \alpha = 20{,}61°,\ \beta = 69{,}39°$

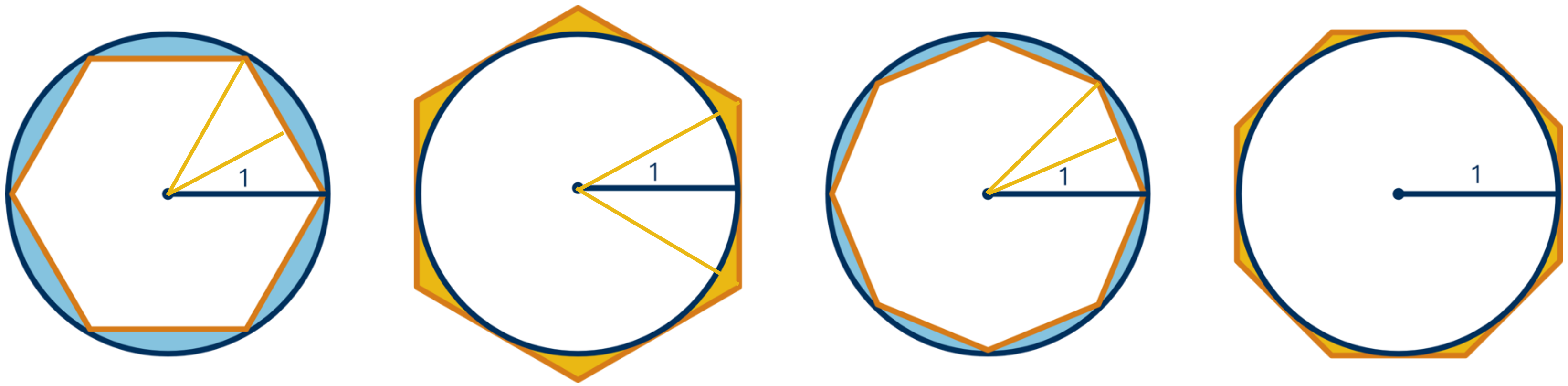
d) h = 9,1 cm | q = 9 cm, $\mathrm{p} = 9{,}201,\ c = 18{,}201,\ b = 12{,}799,\ a = 12{,}941,\ \alpha = 45{,}317°,\ \beta = 44{,}683$

e) a = 27,8 cm | A = 373 cm², $b = 26{,}835cm,\ c = 38{,}639cm,\ \alpha = 46{,}012°,\ \beta = 43{,}988°$

7.1 Trigonometrische Formeln – Aufgaben

(gerundet auf drei Nachkommastellen)

3. Berechnen Sie jeweils, um wie viel Prozent der Flächeninhalt des Vielecks vom Flächeninhalt des Kreises abweicht.



$$A_{kreis} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$$

$$h = b_{halb} = \sqrt{c^2 - a'^2}$$
$$h = b = \sqrt{1^2 - 0{,}5^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$Fläche_{halb} = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot 12 = 2{,}598$$
Abweichung: -17,3%

$$a_{halb} = \tan(30) \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$A_{halb} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 12 = 3{,}464$$
Abweichung: +10,3%

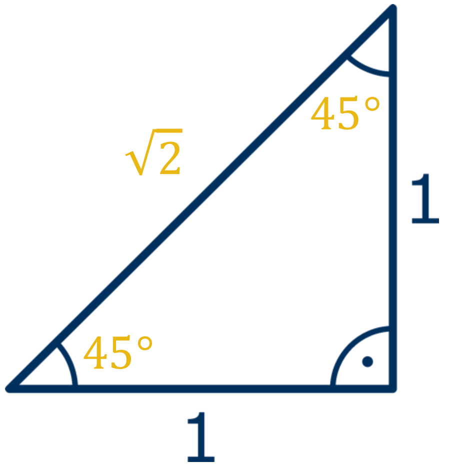
$$a_{halb} = \sin(22{,}5°) \cdot 1 = 0{,}383$$
$$b = \sqrt{1^1 \cdot 0{,}383^2} = 0{,}924$$
$$A_{halb} = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{0{,}383 \cdot 0{,}924}{2} = 2{,}831$$
Abweichung: -9,9%

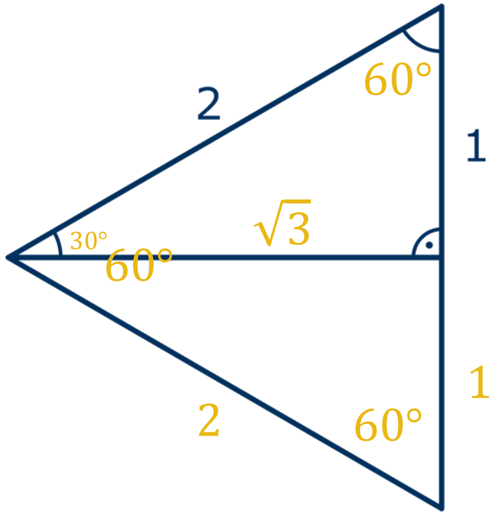
$$a_{halb} = \tan(22{,}5°) \cdot 1 = 0{,}414$$
$$A_{halb} = \frac{0{,}414 \cdot 1}{2} = 0{,}207 \cdot 16 = 3{,}312$$
Abweichung: +5,4%

7.1 Trigonometrische Formeln – Aufgaben

4. Für die Winkel 30°, 45° und 60° kann man die Werte der Winkelfunktion auch ohne TR ermitteln.
    - Ermitteln Sie (ohne TR) die Winkel und Seitenlängen in den beiden Dreiecken.
    - Füllen Sie die Tabelle aus (ohne TR).

	$\alpha = 30°$	$\alpha = 45°$	$\alpha = 60°$
$\sin(\alpha)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos(\alpha)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$tan(\alpha)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$





Fachhochschule Kiel

7.1 Übungsaufgaben - Trigonometrische Formeln

5. Von einem spitzen Winkel α wissen Sie, dass $\tan(\alpha) = \frac{5}{12}$ gilt. Ermitteln Sie $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$.

$$\sin(\alpha) = \frac{5}{13}, \qquad \cos(\alpha) = \frac{12}{13}$$

8 Induktionsbeweise

- Ein Induktionsbeweis ist eine mathematische Methode, um zu zeigen, dass eine Aussage für alle Natürlichen Zahlen gilt.

- Die Aussage wird zunächst für **eine Startzahl** (Induktionsanfang) und dann schrittweise für **alle weiteren Zahlen** (Induktionsschritt) bewiesen.

8.1 Induktionsbeweise – Gaußsche Summenformel

- Behauptung: $\sum_{i=1}^{n} i = 0 + 1 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$
- Induktionsanfang (n = 1): $\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$
- Induktionsannahme: Es wird angenommen, dass die Aussage für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt.

8.1 Induktionsbeweise – Gaußsche Summenformel

- Induktionsschluss:

Es wird nun gezeigt, dass wenn die Aussage für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt, diese auch für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Ziel: Zeigen, dass die Summe der ersten n + 1 Natürlichen Zahlen $\frac{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})\cdot((\boldsymbol{n}+\mathbf{1})+1)}{2}$ ergibt.

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n\cdot(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{n\cdot(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2} = \frac{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})\cdot((\boldsymbol{n}+\mathbf{1})+\mathbf{1})}{\mathbf{2}}$$

q. e. d.